МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВО РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Дагестанский государственный университет»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

Утверждена
на Учёном совете ФГБОУ ВО
«Дагестанский государственный
университет»
прот № 03 от 25.11. 2021 г.
Ректор университета
Рабаданов М.Х.

ПРОГРАММА – МИНИМУМ
кандидатского экзамена по специальности
1.1.6 - Вычислительная математика

Махачкала-2021

Программа составлена на основании паспорта научной специальности 1.1.6 - Вычислительная математика; в соответствии с Программой- минимум кандидатского экзамена по специальности 1.1.6 «Вычислительная математика» по физико-математическим наукам, утверждённой приказом Министерства образования и науки РФ № 274 от 08.10.2007 г., и учебным планом ДГУ по основной образовательной программе аспирантской подготовки.

Программа утверждена на заседании совета факультета математики и компьютерных наук протокол № 1 от 01.10. 2021 г.

Декан факультета математики и компьютерных наук
2.10.2021 г. А. З. Якубов

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

Кандидатского экзамена по специальности
1.1.6 - «Вычислительная математика»
по физико-математическим наукам

Введение

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: функциональный анализ; уравнения математической физики; численные методы.
Программа разработана экспертным советом Высшей аттестационной комиссии Министерства образования Российской Федерации по математике и механике при участии Института вычислительной математики РАН, Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Института прикладной математики.

1. Функциональный анализ

1. Метрические, нормированные, гильбертовы пространства. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Компактные множества.
2. Принцип сжатых отображений, методы последовательных приближений и их приложения. Линейные, нормированные, банаховы пространства и гильбертовы пространства.
3. Сильная и слабая сходимости. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.
4. Линейные функционалы и операторы. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.
5. Сходимость операторов; ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.
6. Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Теорема Банаха—Штейнгауза и ее приложения. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства). Спектр оператора. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов,

решения уравнений и нахождения собственных значений (методы Ритца, Бубнова—Галеркина, наименьших квадратов).
7. Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение.
8. Пространства функций C, L_2, L_p, W_p^l. Обобщенная производная. Неравенства Пуанкаре—Стеклова—Фридрихса. Понятие о теоремах вложения.

2. Задачи математической физики

1. Математические модели физических задач. Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи.
2. Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений. Дивергентная форма записи эллиптического оператора. Понятие об обобщенном решении. Основные свойства гармонических функции (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.
3. Задача Коши. Задача Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний (в одномерном и многомерном случаях).
4. Фундаментальные решения. Характеристики. Понятие об обобщенных решениях. Обобщенные решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость от данных задачи. Теорема Стеклова о разложении в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля.

3. Численные методы

1. Численные методы алгебры. Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами и матрицами специального вида. Одношаговые итерационные методы.
2. Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двушаговые) чебышевские итерационные методы. Методы спуска и метод сопряженных градиентов.
3. Приближение функций. Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Интерполяционные многочлены. Выбор узлов интерполяции.

4. Быстрое дискретное преобразование Фурье. Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами.
5. Численное интегрирование. Интерполяционные квадратурные формулы. Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса. Многомерные квадратурные формулы. Понятие о методе Монте-Карло. Интегрирование сильно осциллирующих функций.
6. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения задачи Коши и краевых задач. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость. Методы прогонки и стрельбы. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Понятие о жестких системах обыкновенных дифференциальных уравнений и методах их решения.
7. Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики. Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость). Методы построения разностных схем (метод сеток, интегроинтерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала); их применение к решению краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка аппроксимации и сходимости. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость.
8. Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач; методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики). Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.
9. Методы решения сеточных уравнений. Прямые методы (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод. Методы расщепления и переменных направлений. Понятие о методе Федоренко. Оценки скорости сходимости.
10. Методы решения обратных и некорректных задач. Применение методов регуляризации минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

Основная литература

1. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2007.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М: Изд-во МГУ, 1999.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1980.
4. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. 4-е изд. М.: Физматлит, 2000.
5. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. . Вычислительные методы т.1 и т.2. М.: Наука, 1976, 1977.
6. Вержбицкий В.М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения: М., Высшая школа, 2000.
7. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 2003.
8. Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. Уч. пособ., 2001.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
10. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
11. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.
12. Самарский А.М. Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.

Дополнительная литература

1. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
2. Хемминг Р. В. Численные методы *для инженеров и научных работников.* М.: Наука, 1972
3. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. ЭЛЕМЕНТЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ. URSS. 2017. 600 с.
4. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам. Изд.стереотип. URSS. 2017. 208 с.