МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Физический факультет)
Кафедра Общей и теоретической физики

«Утверждаю»
Проректор по научной работе и инновациям
_________ Н.А. Ашурбеков
_________________2020 г.

Рабочая программа дисциплины

«Численные методы в физике»

основной образовательной программы подготовки аспиранта по направлению
03.06.01 ФИЗИКА И АСТРОНОМИЯ

Уровень образования: подготовка кадров высшей квалификации (аспирантура)

Квалификация (степень) выпускника:

«Исследователь. Преподаватель-исследователь»

Статус дисциплины: ***вариативная***

Махачкала 2020

Рабочая программа по дисциплине «Численные методы в физике» составлена в 2020 году на основании ФГОС ВО по направлению подготовки научно-педагогических кадров по направлению 03.06.01 Физика и астрономия, квалификация выпускника: «Исследователь. Преподаватель-исследователь» утвержденным приказом Минобрнауки РФ от 30.07.2014 г. № 867;

Составитель рабочей программы
Чл. корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор ____________________ Муртазаев А.К.

Рабочая программа утверждена на заседании ученого совета физического факультета протокол №6 от «28» февраля 2020 г.

Председатель ученого совета
физ. фак-та ________________ Курбанисмаилов В.С.

«28» февраля 2020г.

Согласовано:
начальник Управления
аспирантуры и докторантуры ____________ Э.Т. Рамазанова
«_26» марта 2020г.

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Численные методы в физике» входит в ***вариативную*** часть «Обязательные дисциплины» образовательной программы аспирантуры по направлению 03.06.01 – Физика и астрономия.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с основами вычислительной физики, методами вычислительной физики, способами математического моделирования.

- Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:
  Общепрофессиональных: ОПК-1,
  Универсальных: УК-1, УК-3
  Профессиональные –ПК-1, ПК-2, ПК-3

1. Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям обучающегося в аспирантуре по направлению подготовки кадров высшей квалификации и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, и обучающихся направления подготовки 03.06.01 Физика и астрономия, изучающих дисциплину Численные методы в физике.

Программа разработана в соответствии с:

- Федеральным государственным образовательным стандартом http://science.dgu.ru/eduprogram/03.06.01.pdf от 30 июля 2014 года №867
- Образовательной программой 03.06.01 Физика и астрономии, квалификация: Исследователь, преподаватель исследователь.
- Учебным планом университета по направлению подготовки 03.06.01 Физика и астрономия утвержденным в 2019г.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия, самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме – *контрольная работа, коллоквиум.* И промежуточный контроль в форме - *зачета.*

Объем дисциплины 2 зачетных единиц, в том числе в академических часах по видам учебных занятий –24 часов.

Семестр	Учебные занятия								Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен
	в том числе								
	Контактная работа обучающихся с преподавателем							СРС, в том числе экзамен	
	Всего	Всего	из них						
			Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	консультации		
	72	24	12		12			48	зачет

Цели освоения дисциплины:

Изучать дисциплину «Численные методы в физике» рекомендуется в соответствии с рабочей программой, составленной согласно требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 03.06.01 Физика и астрономия (уровень подготовки кадров высшей квалификации) и учебного плана по направлению 03.06.01 Физика и астрономия.

Целью освоения дисциплины "Численные методы в физике" является знакомство аспирантов с основными численными методами и реализующими их алгоритмами, а также подготовка аспирантов к решению практических задач с использованием численных методов.

Ускорение научно-технического процесса, проникновение ЭВМ во все сферы деятельности человека, повышение роли ЭВМ в фундаментальных и прикладных исследованиях связи с необходимостью широкого использования математических моделей и компьютерного моделирования.

Таким образом, дисциплина “Численные методы в физике” имеет целью:

- Ознакомить аспирантов с методами вычислительной физики;
- научить аспирантов разработке математических моделей физических объектов и магнитных материалов;
- дать навыки постановки численного эксперимента;
- ознакомить с методами обработки и интерпретации результатов компьютерного моделирования.

Задачи дисциплины: Аспиранты должны освоить способы построения математических моделей физических систем и приобрести навыки постановки численного эксперимента. Знать различные численные методы решения физических задач. Должны получить представление об интерпретации и верификации результатов численного метода.

В курсе излагаются основы вычислительной физики, методы вычислительной физики и способы их математического моделирования.

Курс включает лекционные и практические занятия.

2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре

В результате освоения программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине (модулю): освоить способы построения математических моделей физических систем и приобрести навыки постановки численного эксперимента. Знать различные численные методы решения физических задач. Должны получить представление об интерпретации и верификации результатов численного метода.

Коды компетенции	**Результаты освоения ОПОП** ***Содержание компетенций****	**Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине**
ОПК-1	Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно – коммуникационных технологий	**Знать:** базовые теоретические знания в области общей физики, алгебры, высшей математики, физики фазовых переходов и критических явлений **Уметь:** использовать специализированные знания в области физики для освоения профильных физических дисциплин (в соответствии с направлением подготовки «Физика и астрономия» **Владеть:** методами количественного формулирования и решения задач численными методами.
УК-1	Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и	**Знать**: основные методы сбора и анализа информации, способы формализации цели и методы ее достижения

	практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	**Уметь:** анализировать, обобщать и воспринимать информацию - ставить цель и формулировать задачи по её достижению; **Владеть**: способностью критического анализа и оценке.
УК-3	готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач.	**Знать**: о целесообразности участия в работе российских и зарубежных исследовательских коллективов для решения определенных задач научно-исследовательского характера. Принимать участие в работе российского научно-исследовательского центра «Институт общей физики РАН» для успешной работы над диссертацией и консультирования с ведущими членами этого института.
ПК-1	Способность выполнять математическое моделирование объектов и процессов с целью анализа и оптимизации их параметров с использованием методов, алгоритмов и имеющихся средств исследований, включая стандартные пакеты прикладных программ	**уметь:** - готовить сообщения на научно-практической конференции с широким спектром тематики; - **владеть:** - навыками обсуждения проблемных работ из периодической научной

		печати; - методами сбора информации из различных источников для подготовки к семинару, докладу на конференции. -
ПК-2		**знать:** - информационные технологии, применяемые при моделировании физических свойств в области физики конденсированного состояния; - базы данных для твердотельных материалов; **уметь:** - работать с информацией в области физики конденсированного состояния из различных источников: отечественной и зарубежной периодической литературой, монографий и учебников, электронных ресурсов Интернет; **владеть:** - методами обработки полученных данных, визуализации результатов работы с применением современного программного обеспечения.
ПК-3	Способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в	**Знать:** основные законы в области физики

	профессиональной деятельности, применять методы физического анализа и моделирования, теоретического и математического исследования	конденсированного состояния, необходимые для осуществления профессиональной деятельности: методы моделирования физических процессов и их теоретического анализа. **Уметь:** использовать основные законы и уравнения в области физики конденсированного состояния для успешного осуществления профессиональной деятельности.

3.Место дисциплины в структуре ОПОП:

Дисциплина «Численные методы в физике» входит в вариативнуюобязательную часть образовательной программы аспирантуры по направлению 03.06.01 Физика и астрономия.

Для освоения дисциплины необходимо следующими знаниями и компетенциями: базовые теоретические знания в области общей физики, алгебры, высшей математики, физики фазовых переходов и критических явлений, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики и компетенции: Общепрофессиональных: ОПК-1,Универсальных: УК-1, УК-3, Профессиональные –ПК-1, ПК-2, ПК-3

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих за ней дисциплин:

Знания и умения, практические навыки, приобретенные аспирантами в результате изучения дисциплины, будут использоваться при изучении курсов математического моделирования, вычислительного практикума, при написании диссертации, связанных с математическим моделированием и обработкой наборов данных, решением конкретных задач из механики, физики и т.п. Аспиранты должны освоить способы построения математических моделей физических систем и приобрести навыки постановки численного эксперимента. Знать различные численные методы решения физических задач. Должны получить представление об интерпретации и верификации результатов численного метода.

4. Объем, структура и содержание дисциплины.
4.1. Объем дисциплины составляет 2 зачетных единиц, 10 академических часов. СРС – 62 часов
4.2. Структура дисциплины.

№ п/п	Разделы и темы дисциплины	Всего часов по учебному	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Самостоятельная работа	Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные	Контроль самост.		
	Модуль 1.								
1	Численные методы в физике: основные понятия, постановка задачи.	1		2	2			6	Опросы, представление докладов, участие в дискуссиях, тест
2	Приближение функций. Интерполяция функций. Подбор эмпирических формул. Линейная и квадратичная интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа.	1			2			6	Опросы, представление докладов, участие в дискуссиях, тест
3	Приближение функций. Аппроксимация функций. Метод наименьших квадратов.	1		2	2			6	Опросы, представление докладов, участие в дискуссиях, тест
4	Методы численного интегрирования. Методы прямоугольников	1		2				6	Проверка домашнего задания, самостоятельная работа,

	, трапеций. Метод Симпсона. Метод Монте-Карло.								контрольная работа
	Итого по модулю 1:			**6**	**6**			**24**	
	Модуль 2.								
1	Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.	1		2	2			4	Опросы, представление докладов, участие в дискуссиях, тест
2	Решение дифференциальных уравнений второго порядка.	1			2			6	Опросы, представление докладов, участие в дискуссиях, тест
3	Численные методы решения нелинейных уравнений.	1		2				6	Опросы, представление докладов, участие в дискуссиях, тест. Коллоквиум.
4	Численные методы минимизации. Нахождение экстремумов функций.	1			2			4	Опросы, представление докладов, участие в дискуссиях, тест. Коллоквиум.
5	Численные методы минимизации функций многих переменных. Симплексный метод.	1		2		2		4	Проверка домашнего задания, самостоятельная работа, контрольная работа
	Итого по модулю 2:			**6**	**6**			**24**	
	ИТОГО			**12**	**12**			**48**	

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

Модуль 1.

Тема 1. Численные методы в физике: основные понятия, постановка задачи.

Основные этапы численного решения задачи на ЭВМ Решение прикладных задач математической физики с использованием ЭВМ можно разбить на несколько этапов:

1. Физическая постановка задачи. На этом этапе осуществляется физическая постановка задачи и намечается путь ее решения.
2. Математическое моделирование. На этом этапе строится или выбирается математическая модель, описывающая соответствующую физическую задачу. Модель должна адекватно описывать основные законы физического процесса.
3. Выбор численного метода. Для решения задачи необходимо найти численный метод, позволяющий свести ее к некоторому вычислительному алгоритму.
4. Разработка алгоритма решения задачи. Алгоритм решения задачи записывается как последовательность логических и арифметических операций. Алгоритм можно представить в виде блок-схемы или стилизованной диаграммы.
5. Составление программы. Программа, реализующая алгоритм решения задачи, записывается на одном из языков программирования высокого уровня (это зависит от математического обеспечения ВЦ, где предполагается решение задачи).
6. Отладка программы. Отладка программы состоит из 2-х этапов: тестирование и исправление ошибок.
7. Счет по отлаженной программе. На этом этапе готовятся исходные данные для рассчитываемых вариантов, и осуществляется счет по отлаженной программе.
8. Анализ результатов счета. Полученные с помощью ЭВМ результаты численного счета анализируются, сравниваются с экспериментальными данными, и оформляется соответствующая научно-техническая документация.
9. Внедрение полученных результатов.

Погрешности вычислений.

Отклонение истинного решения от приближенного назовем погрешностью. Существуют четыре источника погрешностей, возникающих в результате численного решения задачи.

Математическая модель. Погрешность математической модели связана с ее приближенным описанием реального объекта. Например, если при моделировании экономической системы не учитывать инфляции, а считать цены постоянными, трудно рассчитывать на достоверность результатов. Погрешность математической модели называется неустранимой.

Будем в дальнейшем предполагать, что математическая модель фиксирована и ее погрешность учитывать не будем.

Исходные данные. Исходные данные, как правило, содержат погрешности, так как они либо неточно измерены, либо являются результатом решения некоторых вспомогательных задач. Например, масса снаряда, производительность оборудования, предполагаемая цена товара и др. Во многих физических и технических задачах погрешность измерений составляет 1 – 10%. Погрешность исходных данных так же, как и погрешность математической модели, считается неустранимой.

Погрешность метода. Применяемые для решения задачи методы как правило являются приближенными. Например, заменяют интеграл суммой, функцию – многочленом, производную – разностью и т. д. Погрешность метода необходимо определять для конкретного метода. Обычно ее можно оценить и проконтролировать. Следует выбирать погрешность метода так, чтобы она была не более чем на порядок меньше неустранимой погрешности. Большая погрешность снижает точность решения, а меньшая требует значительного увеличения объема вычислений.

Вычислительная погрешность. Погрешность округления возникает из-за того, что вычисления производятся с конечным числом значащих цифр (для современных ЭВМ это, в зависимости от используемых переменных, составляет 10 – 18 знаков). Округление производят по следующему правилу: если в старшем из отбрасываемых разрядов стоит цифра меньше пяти, то содержимое сохраняемых разрядов не изменяется; в противном случае в младший сохраняемый разряд добавляется единица с тем же знаком, что и у самого числа. При решении больших задач производятся миллиарды вычислений, но так как погрешности имеют разные знаки, то они частично взаимокомпенсируются.

Вычислительные методы. Под вычислительными методами понимают методы, которые используются для преобразования задач к виду, удобному для реализации на ЭВМ. Рассмотрим два класса вычислительных методов, которые часто используются на практике.

Прямые методы. Метод решения задачи называется прямым, если он позволяет получить решение после выполнения конечного числа элементарных операций.

Итерационные методы. Суть итерационных методов состоит в построении последовательных приближений к решению задачи. Вначале выбирают одно или несколько начальных приближений, а затем последовательно, используя найденные ранее приближения и однотипную процедуру расчета, строят новые приближения. В результате такого итерационного процесса можно теоретически построить бесконечную последовательность приближений к решению. Если эта последовательность сходится (что бывает не всегда), то говорят, что итерационный метод сходится. Отдельный шаг итерационного процесса называется итерацией.

Тема 2. Приближение функций. Интерполяция функций. Подбор эмпирических формул. Линейная и квадратичная интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

Задача приближения (аппроксимации) функций заключается в том, чтобы для данной функции построить другую, отличную от нее функцию, значения которой достаточно близки к значениям данной функции. Такая задача возникает на практике достаточно часто. Укажем наиболее типичные случаи.

1. Функция задана таблицей в конечном множестве точек, а вычисления нужно произвести в других точках.
2. Функция задана аналитически, но ее вычисление по формуле затруднительно.

При решении задачи поиска приближенной функции возникают следующие проблемы:

1. Необходимо выбрать вид приближенной функции. Для приближения широко используются многочлены, тригонометрические функции, показательные функции и т. д.
2. Необходимо выбрать критерий близости исходной и приближенной функции. Это может быть требование совпадения обеих функций в узловых точках (задача интерполяции), минимизация среднеквадратического уклонения (метод наименьших квадратов) и др.
3. Необходимо указать правило (алгоритм), позволяющее с заданной точностью найти приближение функции.

Классический подход к решению задачи построения приближающей функции основывается на требовании строгого совпадения значений $f(x)$ и $F(x)$ в точках $x_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$, т.е.

$$F(x_1) = y_1,\ F(x_2) = y_2,\ \dots,\ F(x_n) = y_n.$$

В этом случае нахождение приближенной функции называют ***интерполяцией*** (или *интерполированием*), а точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ – *узлами интерполяции*.

Тема 3. Приближение функций. Аппроксимация функций. Метод наименьших квадратов.

Пусть в результате измерений в процессе опыта получено табличное задание некоторой функции $f(x)$, выражающей связь между двумя географическими параметрами:

x	x_1	x_2	…	x_n
$f(x)$	y_1	y_2	…	y_n

Конечно, можно найти формулу, выражающую эту зависимость аналитически, применив метод интерполяции. Однако, совпадение значений полученного аналитического задания функции в узлах интерполяции с имеющимися эмпирическими данными часто может вовсе не означать совпадение характеров поведения исходной и интерполирующей функции на всем интервале наблюдения. Кроме того, табличная зависимость показателей всегда получается в результате измерений различными приборами, имеющими определенную и не всегда достаточно малую погрешность измерения. Требование точного совпадения значений приближающей и приближаемой функций в узлах является тем более неоправданным, если значения функции $f(x)$, полученные в результате измерений уже сами являются приближенными.

Задача аппроксимации функции одной переменной с самого начала обязательно учитывает характер поведения исходной функции на всем интервале наблюдений.

На практике вид приближающей функции чаще всего определяют путем сравнения вида приближенно построенного графика функции y = f(x) с графиками известных исследователю функций, заданных аналитически (чаще всего простых по виду элементарных функций). А именно, по таблице экспериментальных данных строится точечный график f(x), затем проводится плавная кривая, по возможности наилучшим образом отражающая характер расположения точек. По полученной таким образом кривой на качественном уровне устанавливается вид приближающей функции.

Метод наименьших квадратов.

Через имеющееся “облако” точек всегда можно попытаться провести линию установленного вида, которая является наилучшей в определенном смысле среди всех линий данного вида, то есть “ближайшей” к точкам наблюдений по их совокупности. Для этого определим вначале понятие близости линии к некоторому множеству точек на плоскости. Меры такой близости могут быть различными. Однако, любая разумная мера должна быть, очевидно, связана с расстоянием от точек наблюдения до рассматриваемой линии (задаваемой уравнением $y=F(x)$).

Предположим, что приближающая функция $F(x)$ в точках $x_1, x_2, ..., x_n$ имеет значения $y_1, y_2, ..., y_n$. Часто в качестве критерия близости используется минимум суммы квадратов разностей наблюдений зависимой переменной y_i и теоретических, рассчитанных по уравнению регрессии значений $\underline{y}_i$. Здесь считается, что y_i и x_i – известные данные наблюдений, а F - уравнение линии регрессии с неизвестными параметрами (формулы для их вычисления будут приведены ниже). Метод оценивания параметров приближающей функции, минимизирующий сумму квадратов отклонений наблюдений зависимой переменной от значений искомой функции, называется ***методом наименьших квадратов (МНК)*** или **Least Squares Method (LS)**.

Тема 4. Методы численного интегрирования. Методы прямоугольников, трапеций. Метод Симпсона. Метод Монте-Карло.

При решении многих задач в различных областях физики сталкиваются с вычислением интегралов. Пусть требуется вычислить определенный интеграл:

$$J = \int_a^b f(x)dx. \tag{4.1}$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то интеграл (4.1) существует и может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница

$$J = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{4.2}$$

Однако далеко не всегда удается выразить первообразную $F(x)$ через элементарные функции. Также часто подынтегральная функция бывает задана не аналитически, а таблично или в виде ряда. В этих случаях применяется приближенное численное интегрирование. Многие методы численного интегрирования достаточно просты, легко могут быть реализованы на ЭВМ и позволяют вычислить значение интеграла с любой наперед заданной точностью.

Основная идея численного интегрирования заложена в определении интеграла как предела интегральной суммы:

$$J = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x. \tag{4.3}$$

где $\Delta x = (b-a)/n$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Рассмотрим некоторые наиболее популярные численные методы вычисления определенных интегралов.

Метод прямоугольников. Метод прямоугольников основана на замене подынтегральной функции f(x) кусочно-постоянной функцией.

Метод трапеций. Формула трапеций аналогична формуле прямоугольников, но в отличие от нее подынтегральная функция $f(x)$ на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется отрезком прямой.

Метод Симпсона (формула парабол). Эта формула впервые была предложена английским математиком Симпсоном и обладает более высокой точностью по сравнению с другими рассмотренными нами методами. Формула Симпсона основана на замене подынтегральной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ дугой параболы

Таким образом, обобщая перечисленные методы, приведем все формулы в единой таблице:

Метод	$h = (\mathrm{b} - a)/n$
Прямоугольников	$S = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih)$
	$S = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih+h)$
	$S = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih+0.5h)$
Трапеций	$S = h\left\{0.5[f(a)+f(b)]+\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right\}$
Симпсона	$S = \frac{h}{6}\left\{\begin{array}{l} f(a)+f(b)+4f(b-0.5h)+ \\ +\sum_{i=1}^{n-1}[2f(a+ih)+4f(a+ih-0.5h)] \end{array}\right.$

Метод Монте-Карло. В математике методами Монте-Карло принято называть численные методы, использующие случайные величины. Отметим, что методы Монте-Карло широко используются не только при вычислении определенных интегралов, но и при моделировании различных систем во многих областях науки.

Для вычисления интегралов методом Монте-Карло существует два универсальных простейших способа. Универсальными эти способы считаются потому, что они не накладывают на функцию никаких требований (гладкости, монотонности и пр.), а потому применимы для любых функций.

- **Первый** способ основан на нахождении среднего значения подынтегральной функции на области интегрирования;
- **второй** – на геометрической интерпретации интеграла как площади (или объема, если интеграл многомерный).

Вычисление среднего значения функции. Приближенное значение интеграла данным методом может быть определено по формуле

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i). \qquad (4.4)$$

Случайные числа ***r***, получаемые на практике, обычно лежат в интервале [0, 1]. Для получения случайной величины ξ, равномерно расположенной на интервале [*a*, *b*] следует использовать следующую формулу $\xi = a + (b-a)r$.

Модуль 2.

Тема 5. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данной теме будут рассмотрены различные методы численного решения дифференциальных уравнений. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}. \tag{5.1}$$

При определенных ограничениях, наложенных на функцию f(x, y) (будем предполагать, что эти условия выполняются), задача (5.1) имеет единственное решение.

При численном решении задачи (5.1) требуется определить значение неизвестной функции y(x) в некоторой точке b. Для решения поставленной задачи интервал [a, b] (будем предполагать, что x0 = a) разбивают на n частей с точками разбиения x1, x2, x3, …, xn = b. Затем по приближенным формулам последовательно вычисляют значения y1 = y(x1), y2 = y(x2), y3 = y(x3), …, yn = y(xn). Множество {xi} называют сеткой интегрирования, точки xi – узлами сетки:

$$x_i = a + ih \ , \tag{5.2}$$

где h – шаг интегрирования, определяемый по формуле

$$h = (b - a)/n. \tag{5.3}$$

Большинство приближенных методов решения дифференциальных уравнений основаны на представлении уравнения (5.1) в виде $dy = f(x, y)dx$, и последующем его интегрировании в пределах от xi до xi+1:

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx \ , \tag{5.4}$$

или

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx \ . \tag{5.5}$$

Формула (5.5) является исходным для большинства методов. Сами методы в основном отличаются по дополнительным предположениям, которые принимаются при вычислении приращения, заданного в правой части (5.5) в виде определенного интеграла.

Метод Эйлера

В методе Эйлера интеграл $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx$ в правой части формулы (5.5) вычисляется с помощью формулы левых прямоугольников:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i,y_i)dx = hf(x_i,y_i). \quad (5.6)$$

Таким образом, формула (5.4) теперь примет вид:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \quad (5.7)$$

Модифицированный метод Эйлера

Более точным является модифицированный метод Эйлера, в котором используется следующая формула:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left\{x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right\}. \quad (5.8)$$

Таблица 5.1. Формулы численного решения ОДУ.

Метод	
	$h = (b - a)/n$, $x_i = a + ih$, $x_{i+1} = x_i + h$
Эйлера	$y_{i+1} = y_i + hf(x_i)$
Эйлера модифицированный	$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + 0.5h)$
Эйлера-Коши	$y_{i+1} = y_i + 0.5h[f(x_i) + f(x_i + h)]$
Рунге-Кутты 2	$k_1 = f(x_i)$ $k_2 = f(x_i + h)$ $y_{i+1} = y_i + 0.5h(k_1 + k_2)$
Рунге-Кутты 3	$k_1 = f(x_i)$ $k_2 = f(x_i + 0.5h)$ $k_3 = f(x_i + h)$ $y_{i+1} = y_i + h(k_1 + 4k_2 + k_3)/6$
Рунге-Кутты 4	$k_1 = f(x_i)$ $k_2 = k_3 = f(x_i + 0.5h)$ $k_4 = f(x_i + h)$ $y_{i+1} = y_i + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$

Тема 6. Решение дифференциальных уравнений второго порядка.

Данная тема является продолжением предыдущей и рассматривает методы численного решения дифференциальных уравнений второго порядка.

Пусть дано дифференциальное уравнение второго порядка в форме задачи Коши:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y'(x_0) = y'_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}. \quad (6.1)$$

Для численного интегрирования задачи (6.1) его следует сначала преобразовать к нормальной системе второго порядка. Для этого введем следующие обозначения:

$$y' = f_1(x, y, y'), \tag{6.2}$$

и получим в общем виде систему уравнений (задачу Коши):

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y' = f_1(x, y, y') \end{cases}, \tag{6.3}$$

при:

$$\begin{cases} y'(x_0) = y'_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}. \tag{6.4}$$

Таким образом, все рассмотренные в предыдущей работе численные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка могут быть применены и для решения дифференциальных уравнений второго порядка.

Тема 7. Численные методы решения нелинейных уравнений.

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0, \tag{7.1}$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $a \le x \le b$.

Функцию f(x) называют алгебраической функцией, если для получения значения функции по данному x необходимо выполнить арифметические операции и возведение в степень с рациональным показателем. Функцию f(x) называют трансцендентной, если она содержит логарифмическую, показательную, тригонометрические, обратные тригонометрические и другие функции. Если в уравнение (7.1) входят только алгебраические функции, то уравнение называют алгебраическим. Если в записи уравнения (7.1) содержится трансцендентная функция, то уравнение называют трансцендентным.

Корнем уравнения (7.1) или нулем функции $f(x)$ называется всякое значение ξ, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, то есть такое, что $f(\xi) = 0$,. Предположим, что уравнение (7.1) имеет лишь ***изолированные*** корни, то есть для каждого корня существует окрестность, не содержащая других корней этого уравнения.

В общем случае задача нахождения всех или некоторых корней уравнения (7.1) распадается на три подзадачи:

1. определение количества, характера и расположения корней;
2. нахождение приближенных значений корней;
3. выбор интересующих корней и нахождение их с заданной точностью.

Будем считать, что уравнение (7.1) имеет только действительные корни. Тогда нахождение корней с заданной точностью необходимо проводить в два этапа:

1. отделение корней, т.е. нахождение достаточно малых промежутков, в которых содержится один и только один корень данного уравнения;
2. уточнение приближенных корней, т.е. нахождение корней с заданной точностью.

Процесс отделения корней можно проводить различными способами. Широко используемые способы отделения корней – графический и аналитический (табличный).

Предположим, что мы отделили корни уравнения (7.1). Для уточнения корней используются различные приближенные методы (метод половинного деления (бисекции), метод хорд, метод Ньютона (касательных), метод секущих, метод итераций).

Тема 8. Численные методы минимизации. Нахождение экстремумов функций.

При решении различных физических задач часто сталкиваются с необходимостью нахождения минимального или максимального значения некоторой функции $y = f(x)$. Так как простой заменой функции $f(x)$ на $-f(x)$ задача нахождения максимума может быть заменена задачей нахождения минимума то достаточно рассмотреть случай поиска минимума функции. Для решения данной задачи аналитически часто вычисляют производную $f'(x)$ от исходной функции и находят решение уравнения $f'(x) = 0$. В этом случае задача сводится к предыдущей. В большинстве случаев из-за сложности исходной функции задача не подается аналитическому решению.

Таким образом, задачей данной темы является нахождение минимумов (или максимумов) функции $f(x)$ на некотором интервале $[a, b]$.

Точка минимума ξ называется **локальной**, если существует окрестность этой точки δ, для которой выполняется условие:

$$f(\xi) \le f(x), \quad \forall x \in [\xi - \delta, \xi + \delta], \quad x \in [\xi - \delta, \xi + \delta]. \qquad (8.1)$$

Точка минимума ξ называется **глобальной**, если для нее выполняется условие:

$$f(\xi) \le f(x), \quad \forall x \in [\xi - \delta, \xi + \delta]. \quad x \in [a, b]. \qquad (8.2)$$

Если вместо знака неравенства или равенства стоит просто знак неравенства, то говорят, что ξ является точкой строгого **локального** или **глобального** минимума. На рисунке 8.1. точки ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 и ξ_5 являются точками локального минимума, а точка ξ_2 является к тому же и точкой глобального минимума на интервале $[a, b]$.

При нахождении минимума функции, как и при решении нелинейных уравнений, вначале следует провести локализацию, т.е. определить отрезок локализации $[a, b]$, на котором существует только одна точка локального минимума, а затем приступить к этапу итерационного уточнения.

Общего алгоритма определения отрезка локализации не существует, поэтому для каждой отдельной задачи проводят ее предварительный анализ, либо вычисляют на основе такой же задачи, решенной ранее.

Одним из самых простых способов локализации минимума является метод сеток. Он заключается в следующем:

На отрезке $[a, b]$ строится равномерная сетка из n точек с координатами $x_0, x_1, \ldots, x_n$. При этом координаты точек вычисляются по формуле:

$$x_i = a + ih, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n \tag{8.3}$$

где $h = (b-a)/n$.

Вычисляются значения функции в узлах $f(x_i)$. Если для какой-то точки выполняется условие:

$$f(x_{i-1}) > f(x_i) < f(x_{i+1}), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \tag{8.4}$$

то на интервале $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ находится локальный минимум.

Если условие (8.4) выполнится для нескольких точек, то на интервале будут располагаться несколько локальных минимумов. В этом случае следует провести процедуру уточнение для каждой отдельной области локализации. Вследствие чего мы найдем несколько локальных минимумов $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$.

Если в задаче требуется найти также и точку глобального минимума, то среди найденных значений локального минимума надо найти наименьшее.

Методы итерационного уточнения условно делятся на три группы:

1. К первой группе относятся методы, основанные на вычислении значений лишь самой функции $f(x)$ (**методы нулевого порядка**);
2. Вторую группу составляют методы, основанные на вычислении значений как самой функции $f(x)$, так и ее первой производной $f'(x)$ (**методы первого порядка**);
3. Третью группу составляют методы, использующие значения функции, ее первой и второй производной $f'(x)$ и $f''(x)$ (**методы второго порядка**).

При нахождении минимумов функции $f(x)$ будем предполагать, что функция на отрезке $[a, b]$ непрерывна и является унимодальной. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке локализации $[a, b]$ с одной точкой локального минимума ξ. Если слева от точки минимума функция строго убывает, а справа строго возрастает, т.е. выполняется условие:

$$\begin{cases} f(x_i) > f(x_j), & при \quad a \le x_i < x_j \le \xi \\ f(x_i) < f(x_j), & при \quad \xi \le x_i < x_j \le b \end{cases}, \tag{8.5}$$

то такая функция называется унимодальной.

Рассмотрим некоторые методы решения задачи минимизации более подробно. При этом будем рассматривать только методы нулевого порядка. К ним относятся:

- Метод сеток (оптимально пассивный поиск);

- Алгоритм Свенна;
- Метод деления отрезка пополам (дихотомии);
- Метод золотого сечения.

Тема 9. Численные методы минимизации функций многих переменных. Симплексный метод.

Правильным симплексом в пространстве E_n называется множество из $n+1$ равноудаленных друг от друга точек (вершин симплекса). При этом отрезок, соединяющий две вершины, называется ребром симплекса.

В пространстве E_2 (на плоскости) правильным симплексом является совокупность вершин равностороннего треугольника, в E_3 (в трехмерной системе координат) – правильного тетраэдра. Если x^0 – одна из вершин правильного симплекса в E_n то координаты остальных n вершин $x^1,\ldots,x^n$ можно найти по формулам:

$$x_j^i = \begin{cases} x_j^1 + d_1, & i \neq j, \\ x_j^1 + d_2, & i = j, \end{cases} \qquad (8.15)$$

где

$$d_1 = \frac{\sqrt{n+1}-1}{n\sqrt{2}} l, \qquad d_2 = \frac{\sqrt{n+1}+n-1}{n\sqrt{2}} l, \qquad l \text{ – длина ребра.}$$

Например, в случае двумерной системы симплекс будет представлять собой три точки с координатами:

$$\begin{array}{ll} x_0 & y_0 \\ x_1 = x_0 + \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} l & y_1 = y_0 + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} l \\ x_2 = x_0 + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} l & y_2 = y_0 + \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} l \end{array} . \qquad (8.16)$$

В случае трехмерной системы четыре точки:

$$\begin{array}{lll} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 = x_0 + \dfrac{4}{3\sqrt{2}} l & y_1 = y_0 + \dfrac{1}{3\sqrt{2}} l & z_1 = z_0 + \dfrac{1}{3\sqrt{2}} l \\ x_2 = x_0 + \dfrac{1}{3\sqrt{2}} l & y_2 = y_0 + \dfrac{4}{3\sqrt{2}} l & z_2 = z_0 + \dfrac{1}{3\sqrt{2}} l \\ x_3 = x_0 + \dfrac{1}{3\sqrt{2}} l & y_3 = y_0 + \dfrac{1}{3\sqrt{2}} l & z_3 = z_0 + \dfrac{4}{3\sqrt{2}} l \end{array} , \qquad (8.17)$$

Вершину $\boldsymbol{x}^0$ симплекса, построенного по формулам (8.16) и (8.17), часто называют базовой.

В алгоритме симплексного метода используется следующее важное свойство правильного симплекса. По известному симплексу можно построить новый симплекс отражением какой-либо вершины, например $\boldsymbol{x}^k$, симметрично относительно центра тяжести $\boldsymbol{x}^c$ остальных вершин симплекса.

Новая вершина находится по формуле:

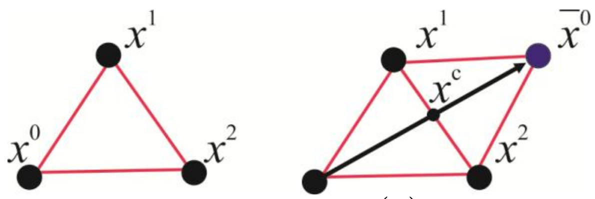
$$x^k = 2x^c - x^k \,, \tag{8.18}$$

где

$$x^c = \frac{1}{n}\sum_{i \neq k} x_i \quad .$$

В результате получается новый правильный симплекс с тем же ребром и вершинами $\{x^k,\ x^i\}$, $i = 0,\ \ldots,\ n$, $i \neq k$. Таким образом, происходит перемещение симплекса в пространстве E_n.

На рисунке представлена иллюстрация этого свойства симплекса в пространстве E_2.



Поиск точки минимума функции $f(x)$ с помощью правильных симплексов производят следующим образом. На каждой итерации сравниваются значения $f(x)$ в вершинах симплекса. Затем проводят описанную выше процедуру отражения для той вершины, в которой $f(x)$ принимает наибольшее значение. Если в отраженной вершине получается меньшее значение функции, то переходят к новому симплексу. В противном случае выполняют еще одну попытку отражения для вершины со следующим по величине значением $f(x)$. Если и она не приводит к уменьшению функции, то сокращают длину ребра симплекса, например, вдвое и строят новый симплекс с этим ребром.

В качестве базовой выбирают ту вершину x^0 старого симплекса, в которой функция принимает минимальное значение. Поиск точки минимума $f(x)$ заканчивают, когда либо ребро симплекса, либо разность между значениями функции в вершинах симплекса становятся достаточно малыми.

5.Оценочные средства для текущего контроля и аттестации обучающегося.

В течение семестра аспиранты выполняют:
- домашние задания, выполнение которых контролируется и при необходимости обсуждается на практических занятиях;
- промежуточные контрольные работы во время практических занятий для выявления степени усвоения пройденного материала;
- выполнение итоговой контрольной работы по практическим занятиям, охватывающие базовые вопросы курса: в конце семестра.

Итоговый контроль.: зачет в конце семестра, включающий проверку теоретических знаний и умение решения по всему пройденному материалу**.**

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов.

Виды и порядок выполнения самостоятельной работы:

1. Изучение рекомендованной литературы
2. Поиск в Интернете дополнительного материала
3. Подготовка реферата (до 5 страниц), презентации и доклада (10-15 минут)
4. Подготовка к зачету.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов:

Виды и порядок выполнения самостоятельной работы:

№ п/п	Вид самостоятельной работы	Вид контроля	Учебно-методич. обеспечение
1.	Подготовка реферата (до 5 страниц), презентации и доклада (10-15 минут)	Прием реферата, презентации, доклада и оценка качества их исполнения на мини-	См. разделы 6.1, 6.2 и 7 данного документа
2.	Подготовка к зачету	Промежуточная аттестация в форме зачета.	См. разделы 6.3, 6.4 и 7 данного

1. Текущий контроль: Прием реферата, презентации, доклада и оценка качества их исполнения на мини-конференции.
2. Промежуточная аттестация в форме зачета.

Текущий контроль успеваемости осуществляется непрерывно, на протяжении всего курса. Прежде всего, это устный опрос по ходу лекции, выполняемый для оперативной активизации внимания аспирантов и оценки их уровня восприятия. Результаты устного опроса учитываются при выборе экзаменационного вопроса. Примерно с пятой недели семестра - в форме контроля самостоятельной работы по подготовке рефератов, содержание которых будет представлено публично на мини-конференции и сопровождено презентацией и небольшими тезисами в электронной форме.
Выбор темы реферата согласуется с лектором.

Практикуется два типа тем - самостоятельное изучение конкретной проблемы или ознакомление с учебным дистанционным курсом по теме курса. Результаты самостоятельной работы играют роль допуска к эзачету.
Промежуточная аттестация:

Для допуска к зачету надлежит сделать сообщение на мини-конференции, представить презентацию и собственно текст реферата.
Зачет проходит в устной форме в виде ответов на билеты и, если понадобится, то на дополнительные контрольные вопросы, которые задает экзаменатор при необходимости уточнить оценку.

Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Тематика рефератов ежегодно подвергается пересмотру и обновлению соответственно появлению новых перспективных средств и методов работы с информацией. Предлагается следующий список рефератов, который может быть расширен и уточнен при обсуждении и конкретизации с аспирантами.

Примеры тем рефератов.

- Метод наименьших квадратов.
- Интерполяционный многочлен Лагранжа.
- Численное интегрирование методом Монте-Карло.
- Методы Рунге-Кутта для решения дифференциальных уравнений.
- Решение дифференциальных уравнений второго порядка методом Рунге-Кутта.
- Численные методы решения нелинейных уравнений.
- Минимизация функций многих переменных. Современные методы.

Рекомендации к последовательности выполнения реферата.

А) Изучение проблемы по материалам, доступным в Интернете:

1. Согласовать название сообщения.
2. Написать тезисы реферата по теме.
3. Выразить, чем интересна выбранная тема в наши дни.
4. Подготовить презентацию по выбранной теме.
5. Сделать сообщение на мини-конференции.

Б) Ознакомление с заданным дистанционным курсом:

1. Представить основные идеи заданного курса.
2. Описать достоинства и недостатки материала, изложенного в данном курсе.
3. Написать отзыв на данный курс.
4. Сформулировать рекомендации по применению данного курса.
5. Сделать сообщение о содержании курса на мини-конференции.

Тематика заданий текущего контроля
Типовые контрольные задания

1. Численные методы в физике. Постановка задачи. Корректность задачи.
2. Погрешности вычислений. Абсолютная и относительная погрешность.
3. Приближение функций. Интерполяция функций. Подбор эмпирических формул.
4. Интерполяция функций. Линейная интерполяция.
5. Квадратичная интерполяция.
6. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
7. Аппроксимация функций. Метод наименьших квадратов.
8. Методы численного интегрирования.
9. Метод прямоугольников.
10. Метод трапеций.
11. Метод Симпсона.
12. Методы численного интегрирования. Метод Монте-Карло.
13. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
14. Решение дифференциальных уравнений второго порядка.
15. Методы Рунге-Кутта для решения дифференциальных уравнений.
16. Численные методы решения нелинейных уравнений.
17. Метод Ньютона (касательных). Метод секущих.
18. Численные методы минимизации. Нахождение экстремумов функций.
19. Нахождение экстремумов функций. Алгоритм Свена. Метод золотого сечения.
20. Численные методы минимизации функций многих переменных. Симплексные методы.
21. Симплексный метод Нелдера-Мида.

Примеры заданий промежуточного контроля по дисциплине «Численные методы в физике».

1. Методом половинного деления найти корни уравнения (предварительно отделив их):

$$x^3 - 4x + 2 = 0;$$ с точностью до 0,001;

2. Методом итераций решить уравнение:

$$x + e^x = 0;$$ с точностью до 0,001.

3. Методом касательных решить уравнение:

$$x^4 - 3x - 20 = 0;$$

$$x^2 + \ln x = 0;$$ с точностью до 0,01.

4. Экспериментальные данные содержатся в таблицах. Для каждой из них выполнить следующие операции:

а) Нанести экспериментальные точки $(x_i; y_i)$ на координатную сетку $(x; y)$.

б) Выбрать одну из шести предложенных формул преобразования к новым переменным $(X; Y)$ так, чтобы преобразованные экспериментальные данные $(X_i; Y_i)$ наименее уклонялись от прямой.

в) Методом наименьших квадратов найти наилучшие значения параметров k
и b в уравнении прямой $Y = kX + b$.

г) Найти явный вид эмпирической формулы $y = Q(x, \alpha, \beta)$ и построить график эмпирической функции.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.1	1.4	1.6	1.7	1.9

5. На основании эксперимента получены значения функции $y = f(x)$ в виде таблицы:

x_i	1	2	3	4
y_i	2	1	-1	5

Построить многочлен Лагранжа, приближённо представляющий данную функцию.

6. Функция $y = \cos x$ аппроксимируется интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени для системы трёх равномерно расположенных на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ узлов. Найти приближённое значение функции в точке $\frac{\pi}{12}$ и оценить погрешность вычисления.

7. Построить для указанной функции $y = f(x)$ кубический сплин, интерполирующий её на данном отрезке $[a; b]$ с заданным шагом h.
$y = \cos x,\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ h = \frac{\pi}{2}$. В данном задании найти приближённое значение $\cos\frac{\pi}{3}$ и сравнить с точным значением.

8. Найти приближённые значения следующих определённых интегралов. Оценить ошибку вычисления и сравнить с точным значением. Вычисления вести с пятью знаками после запятой.

а) $\int_0^1 \cos x dx$; использовать метод прямоугольников.

б) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ - методом трапеций.

в) $\int_0^1 \sin x dx$ - методом Симпсона.

г) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ - методом трапеций и методом Симпсона.

9. Для заданной целевой функции $y = f(x)$ найти промежуток $X \subset R$, на котором она унимодальна. Найти точное решение задачи минимизации $f(x) \to \min,\ x \in X,\ X \subset R$. Найти приближённое решение этой задачи с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ методом половинного деления.

$$y = \frac{x^3}{3} + x^2;$$

10. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка на равномерной сетке отрезка $[a; b]$ с шагом 0,2 методом Эйлера. Сравнить численное решение с точным значением. Результаты представить в виде таблиц.

$$y' = \frac{1 + xy}{x^2},\ y\Big|_{x=1} = 0,\ x \in [1, 2],\ \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right);$$

Варианты заданий для практической работы по дисциплине «Численные методы в физике».

Задача № 1.

Построить кусочно-линейный интерполянт по заданной таблице узлов интерполяции. Для построения аналитического выражения линейного интерполянта использовать формулу:

$$P_1(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i),$$

где (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}) – узлы интерполяции. Вычислить с помощью построенного интерполянта значения функции в точках, расположенных между узлами интерполяции. Определить погрешность вычисления значений функции в точках x_{01}= 23,4, x_{02} = = 50,2.
для вычислений использовать формулы:

$$\varepsilon_i = | F(x_{0i}) - P_1(x_{0i})| \quad (i=1,2).$$

Вариант 1. F(x) = $\ln x^2$

x_i	-11,2	-0,5	18,3	43,7	69,2	110,8
$F(x_i)$	4,83	-1,39	5,81	7,55	8,47	9,41

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 23,4 и x_{02} = 50,2.

Вариант 2. F(x) = $5e^{18x}$

x_i	-0,2	0,03	0,1	0,22	0,32
$F(x_i)$	0,03	1,72	6,05	52,46	317,35

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 0,05 и x_{02} = 0,15.

Вариант 3. $F(x) = x^3 + 7x^2 + 5x$

x_i	-5,2	-2,5	0,8	2,4	4,1
$F(x_i)$	22,67	15,63	8,99	66,14	207,09

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 0,2 и x_{02} = 1,8.

Вариант 4. $F(x) = e^{x^2-5x}$

x_i	-0,95	-0,5	-0,2	0,6	1,02
$F(x_i)$	284,29	15,64	2,83	0,07	0,02

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= -0,41 и x_{02} = 0,32.

Вариант 5. F(x) = e^x

x_i	1,01	1,04	1,11	1,16	1,20
$F(x_i)$	2,75	2,83	3,03	3,19	3,32

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 1,031 и x_{02} = 1,152.

Вариант 6. F(x) = *cos x*

x_i	1,01	1,04	1,07	1,13	1,18
$F(x_i)$	0,53	0,51	0,48	0,43	0,38

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 1,022 и x_{02} = 1,145.

Вариант 7. F(x) = *shx*

x_i	1,01	1,03	1,08	1,14	1,19
$F(x_i)$	1,19	1,22	1,30	1,40	1,49

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 1,053 и x_{02} = 1,172.

Вариант 8. F(x) = *lnx*

x_i	1,01	1,06	1,10	1,14	1,19
$F(x_i)$	0,01	0,06	0,09	0,13	0,17

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 1,032 и x_{02} = 1,171.

<u>Вариант 9.</u>F(x) = e^{-x}

x_i	1,01	1,05	1,10	1,14	1,20
$F(x_i)$	0,36	0,35	0,33	0,32	0,30

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 1,028 и x_{02} = 1,172.

<u>Вариант 10.</u>F(x) = *sinx*

x_i	1,00	1,04	1,08	1,10	1,17
$F(x_i)$	0,84	0,86	0,88	0,89	0,92

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 1,058 и x_{02} = 1,124.

<u>Задача № 2.</u>

<u>Задание:</u> По заданной таблице узлов интерполяции построить полином Лагранжа. Пусть заданы узлы интерполяции (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Для этих узлов полином Лагранжа имеет вид:

$$L_2(x) = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Вычислить с помощью построенного полинома значения функции в точках, расположенных между узлами интерполяции. Для этого значения x_{01} и x_{02} подставляются вместо *x* в построенный полином. В указанных точках (x_{01} и x_{02}) рассчитать погрешность вычисления значений функции F(x) с помощью аналитического выражения функции и полинома Лагранжа по формуле: ε_i = = $|F(x_{0i}) - L_n(x_{0i})|$ i=1,2 где $L_n(x_{0i})$ - значение полинома Лагранжа.
Использовать интерполяционную таблицу задачи № 1.

Задача № 3

Вычислить заданные интегралы по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, если отрезок интегрирования разбит на n=2 и n=4 равные части. Оценить погрешность результата и сравнить приближенные значения интеграла с точными.

Указание по выполнению: для выполнения задания использовать следующие итерационные формулы:

Формула приближённого вычисления интеграла **методом прямоугольников:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \ldots + y_{\frac{i-1}{2}} + \ldots + y_{\frac{n-1}{2}})$$

Формула приближённого вычисления интеграла **методом трапеций:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})$$

Формула приближённого вычисления интеграла **методом Симпсона:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}(y_0 + y_n + 4(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \ldots + y_{\frac{n-1}{2}}) + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})$$

Вариант 1.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad \left(\mathrm{I} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785\right)$$

Вариант 2.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad \left(\mathrm{I} = \ln 2 \approx 0{,}693\right)$$

Вариант 3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx \quad \left(\mathrm{I} = 0{,}5\right)$$

Вариант 4.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \left(\mathrm{I} = \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0{,}881\right)$$

Вариант 5.

$$\int_0^e \ln x dx \quad (\mathrm{I}=1)$$

Вариант 6.

$$\int_0^1 \ln(x+1)dx \quad (\mathrm{I}=2\ln 2-1\approx 0{,}386)$$

Вариант 7.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx \quad \left(\mathrm{I}=\frac{\pi}{2}-1\approx 0{,}571\right)$$

Вариант 8.

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} \quad \left(\mathrm{I}=arctg-\frac{\pi}{4}\approx 0{,}433\right)$$

Вариант 9.

$$\int_0^x \cos^3 x dx \quad (\mathrm{I}=0)$$

Вариант 10.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} \quad \left(\mathrm{I}=\ln(1+\sqrt{2}\approx 0{,}881\right)$$

Задача № 4.

Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка на равномерной сетке отрезка [a,b] один раз с шагом h = 0,2, другой – с шагом 0,1 методами Эйлера, Эйлера-Коши и классическим методом Рунге – Кутта. Оценить погрешность численного решения по принципу Рунге. Сравнить численное решение с точным.

Указание по выполнению: для выполнения задания использовать следующие итерационные формулы:

1) **метод Эйлера:** p=1 – порядок метода, x_i – узлы сетки отрезка [a,b], h – шаг разбиения; $x_i = x_{i-1} + h$, $y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$, $i=1, 2, \ldots, m$.
2) **метод Эйлера-Коши:** p=2 – порядок метода, x_i – узлы сетки отрезка [a,b], h – шаг разбиения; $x_i = x_{i-1} + h$, $y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}$; $\Delta y_{i-1} = \frac{1}{2}[k_1^{[i-1]} + k_2^{[i-1]}]$; $i = 1,2,\ldots,m$

$$k_1^{[i-1]} = hf(x_{i-1}, y_{i-1}),\ k_2^{[i-1]} = hf(x_{i-1}+h, y_{i-1}) + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

3) **метод Рунге-Кутта:** p=4 – порядок метода, x_i – узлы сетки отрезка [a,b], h – шаг разбиения; $x_i = x_{i-1} + h$, $y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}$; $\Delta y_{i-1} = \frac{1}{6}[k_1^{[i-1]} + 2k_2^{[i-1]} + 2k_3^{[i-1]} + k_4^{[i-1]}]$;

$i = 1,2,\ldots,m$; $$k_1^{[i-1]} = hf(x_{i-1}, y_{i-1}),\ k_2^{[i-1]} = hf\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{1}{2}k_1^{[i-1]}\right),$$

$$k_3^{[i-1]} = hf\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{1}{2}k_2^{[i-1]}\right),\quad k_4^{[i-1]} = hf\left(x_{i-1} + h, y_{i-1} + k_3^{[i-1]}\right).$$

Для оценки погрешности найденного решения задачи Коши используют принцип Рунге (правило Рунге): $$\varepsilon_i \approx \frac{\left|y_i(h) - y_i(\frac{h}{2})\right|}{2^p - 1}$$

Вариант 1.

$$y' = \frac{1+xy}{x^2},\ y\Big|_{x=1} = 0,\quad 1 \le x \le 2,\quad \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Вариант 2.

$$y' = y - \frac{2x}{y},\ y\Big|_{x=0} = 1,\quad 0 \le x \le 1,\quad \varphi(x) = \sqrt{2x+1}$$

Вариант 3.

$$y' = x + \frac{3y}{x},\ y\Big|_{x=1} = 0,\quad 1 \le x \le 2,\quad \varphi(x) = x^2(x-1)$$

Вариант 4.

$y' = xy$, $y\big|_{x=0} = 1$, $0 \le x \le 1$, $\varphi(x) = e^{x^2/2}$

Вариант 5.

$y' = \dfrac{y^2 + xy}{x^2}$, $y\big|_{x=1} = 1$, $1 \le x \le 2$, $\varphi(x) = x/(1 - \ln x)$

Вариант 6.

$y' = \dfrac{1 - y + \ln x}{x}$, $y\big|_{x=1} = 0$, $1 \le x \le 2$, $\varphi(x) = \ln x$

Вариант 7.

$y' = \dfrac{x + y}{x}$, $y\big|_{x=1} = 0$, $1 \le x \le 2$, $\varphi(x) = x \ln x$

Вариант 8.

$y' + 2xy = xe^{-x^2}$ $y\big|_{x=0} = 0$, $0 \le x \le 1$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{2} x^2 e^{-x^2}$

Вариант 9.

$y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ $y\big|_{x=0} = 0$, $0 \le x \le 1$, $\varphi(x) = \sin x + e^{-\sin x} - 1$

Вариант 10.

$y' + ytgx = \sin 2x$ $y\big|_{x=0} = -1$, $0 \le x \le 1$, $\varphi(x) = (1 - 2\cos x)\cos x$

Задача № 5.

Найти корни уравнения F(x) = 0 методом половинного деления с точностью ε = 0,01.

Указание по выполнению: прежде, чем начать выполнение работы необходимо определить отрезок, на котором находится корень данного уравнения. Это можно сделать графически или построить таблицу значений функции на некотором, достаточно обширном, диапазоне значений аргумента.

Описанные действия можно выполнить с применением компьютера и электронной таблицы MsExcel или на листе бумаги с помощью калькулятора. Выполнить проверку знаков данной функции на концах найденного отрезка (функция, соответствующая данному уравнению, должна иметь разные знаки в точках, определяющих концы отрезка). Получить в качестве результата значение корня уравнения и значение полученной погрешности решения (она определяется по формуле: ε = $\frac{(b-a)}{2^n}$, где n - номер итерации).

Вариант 1. $x^4 + 3x - 20 = 0 \quad x > 0$

Вариант 2. $x^3 - 2x - 5 = 0 \quad x > 0$

Вариант 3. $\frac{x}{2+x} - \ln x = 0$

Вариант 4. $x^4 + 5x - 7 = 0 \quad x > 0$

Вариант 5. $e^x - x - 2 = 0$

Вариант 6. $2 - \ln x - x = 0$

Вариант 7. $2e^x + x - 1 = 0$

Вариант 8. $\frac{1}{2}e^x - x - 1 = 0$

Вариант 9. $\ln x + 0{,}5\, x - 1 = 0$

Вариант 10. $\frac{1}{1+x^2} - \ln x = 0$

Задача № 6.

Найти корни уравнения F(x) = 0 методом касательных (Ньютона) с точностью ε = 0,01. (Для выполнения задачи №6 использовать варианты заданий задачи № 5.)

Указание по выполнению: Начальное приближение x_0 определяется из отрезка определённого в задаче № 5. Аналитически или численным методом

вычисляется производная функции F(x) и используется для вычисления очередного значения корня уравнения F(x) = 0.
Итерационная формула метода Ньютона (касательных):

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Указанная точность вычислений считается достигнутой, если разность (взятая по модулю) между корнями уравнения, полученными в двух соседних итерациях $|x_{i+1} - x_i)| < \varepsilon$.

Задача № 7.

Задание: Найти корни уравнения F(x) = 0 методом простых итераций с точностью ε = 0,01. (Для выполнения задачи №7 использовать варианты заданий задачи № 5.)

Указание по выполнению: Прежде чем применить к предложенному уравнению метод простых итераций необходимо преобразовать данное уравнение из вида F(x) = 0 к виду x = g(x).

Для этого необходимо использовать отрезок [a,b] в пределах которого лежит корень исходного уравнения и найти значение производной функции F′(x) на этом отрезке. Далее, определяется максимальное значение производной на этом отрезке, обозначим его через M, а также - минимальное значение производной на этом отрезке, обозначим его через m.

Определяется коэффициент сходимости метода $q = 1 - \frac{m}{M}$ и проверяется условие сходимости метода простых итераций: q< 1.

Если условие сходимости метода выполняется, то студентом делается вывод о возможности решения данной ему задачи методом простых итераций, после чего им определяется итерационная формула метода x = g(x), т.е. функция g(x) строится следующим образом: **g(x)** $= x - \frac{1}{M}F(x)$. В качестве начального приближения можно использовать приближение x_0, взятое из самостоятельной работы № 5 (соответствующего варианта). После чего, по полученной итерационной формуле, выполняются необходимые вычисления.

Указанная точность вычислений считается достигнутой, если разность (взятая по модулю) между корнями уравнения, полученными в двух соседних итерациях:

$$|x_{i+1} - x_i)| < \varepsilon.$$

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

6.1. Основная литература:

1. Ализняк В.Е. Основы научных вычислений. Введение в численные методы для физиков и инженеров [Электронный ресурс] / В.Е. Ализняк. — Электрон. текстовые данные. — Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2006. — 264 с. — 5-93972-482-5. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/16588.html
2. Ильина В.А. Численные методы для физиков-теоретиков. Часть 2 [Электронный ресурс] / В.А. Ильина, П.К. Силаев. — Электрон. текстовые данные. — Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2004. — 118 с. — 5-93972-320-9. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/16660.html
3. Компьютерное моделирование в физике : В 2-х ч. Ч.2 / Гулд, Харви, Тобочник, Ян ; Пер. с англ. А.Н.Полюдова, В.А.Панченко. - М. : Мир, 1990. - 399 с. : ил. ; 22 см. - ISBN 5-03-001594-9 : 2-50.
4. Магомедов, Магомед Алиевич. Численные методы в физике : учеб.-метод. пособие / Магомедов, Магомед Алиевич, А. К. Муртазаев, К. Ш. Хизриев ; Федерал. агентство по образованию, Дагест. гос. ун-т. - Махачкала : ИПЦ ДГУ, 2007. - 49
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Г. Численные методы. 8-е изд. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. – 624с.
6. Лобанов А.И., Петров И.Б. Вычислительные методы для анализа моделей сложных динамических систем. Часть 1. – М.: МФТИ, 2000. – 168с.
7. Косарев В.И. 12 лекций по вычислительной математике. 2 изд. – М.: Изд-во МФТИ, 2000. – 224с.
8. К. Биндер. Методы Монте-Карло в статистической физике. М. 1982 г.

б) Дополнительная литература:

1. В.М. Замалин и другие. Методы Монте-Карло в статистической термодинамике. М. 1977 г.
2. Эксперимент на дисплее. Серия “Кибернетика – неограниченные возможности и возможные ограничения”. М. 1989 г.
3. Магомедов М.А., Муртазаев А.К., Хизриев К.Ш. Численные методы в физике. Учебно-методическое пособие. – Махачкала: 2007. – 50с.
4. Муртазаев А.К., Магомедов Г.М., Рамазанов М.К., Магомедов М.А., Методы численного эксперимента в физике. Учебное пособие. – Махачкала: 2009. – 58с.
5. Х. Гулд, Я. Тобочник. Компьютерное моделирование в физике. М. 1990 г. т. 1-2;
6. К. Биндер, Д.В. Хеерман. Моделирование методом Монте-Карло в статистической физике. М. 1995г.
7. Д.В. Хеерман. Методы компьютерного эксперимента в теоретической физике. М. 1990 г.

8. С. Кунин. Вычислительная физика М. 1992 г.
9. Турчак Л.И. Основы численных методов. М.: Наука, 1987. 320с.
10. Рябенький В.С. Введение в вычислительную математику. – М/: Наука-Физматлит, 1994. – 335с. 2-е изд. М: Физматлит, 2000. – 296 с.
11. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. – М.: Изд-во МФТИ, 1994. – 528 с.
12. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
13. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608с.
14. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. М.: Изд-во МАИ, 2000.
15. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 1998. – 575с.

6.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»,

1. ЭБС IPRbooks: http://www.iprbookshop.ru/

Лицензионный договор № 2693/17от 02.10.2017г. об оказании услуг по предоставлению доступа.

2. Электронно-библиотечная сист*ема* «Университетская библиотека онлайн» www.biblioclub.ru договор № 55_02/16 от 30.03.2016 г. об оказании информационных услуг
3. Доступ к электронной библиотеки на http://elibrary.ru основании лицензионного соглашения между ФГБОУ ВПО ДГУ и «ООО» «Научная Электронная библиотека» от 15.10.2003.
4. Национальная электронная библиотека https://нэб.рф/.
5. Федеральный портал «Российское образование» http://www.edu.ru/
6. Федеральное хранилище «Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов» http://school-collection.edu.ru/
7. Российский портал «Открытого образования» http://www.openet.edu.ru
8. Сайт образовательных ресурсов Даггосуниверситета http://edu.icc.dgu.ru
9. Информационные ресурсы научной библиотеки Даггосуниверситета http://elib.dgu.ru
10. Федеральный центр образовательного законодательства http://www.lexed.ru
11. www.iqlib.ru - Интернет-библиотека образовательных изданий, в который собраны электронные учебники, справочные и учебные пособия
12. **Springer.** http://link.springer.com.
13. **SCOPUS** https://www.scopus.com
14. **Web of Science** - webofknowledge.com

6.4. Программное обеспечение

Для успешного освоения дисциплины, обучающийся использует следующие программные средства:

- Borland Delphi 7.0
- Embarcadero RAD Studio XE 10.1
- Originlab Originpro 2018

6.5. Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

1. Электронная библиотечная система «Университетская библиотека онлайн» [Электронный ресурс]. - Режим доступа: www URL: http://www.biblioclub.ru/.
2. Электронно-библиотечная система Издательство «Лань» [Электронный ресурс]. - Режим доступа: www URL: http://e.lanbook.com/.

7.Материально-техническое обеспечение дисциплины:

При освоении дисциплины для проведения лекционных занятий нужны учебные аудитории, оснащённые мультимедийным оборудованием, для выполнения практических и лабораторных работ необходимы классы персональных компьютеров с набором базового программного обеспечения разработчика – системы программирования на языках BorlandDelphi, C/C++, системы MATLAB, MATHCAD, MAPLE, ORIGIN. Для этого используется дисплейный класс магистерской и аспирантской подготовки ИФ ДНЦ РАН, научные лаборатории Института физики.

Для освоения курса используется материально – техническая база базовой кафедры «Перспективные исследования и разработки» и Института физики ДНЦ РАН.

Лекционные занятия проводятся в аудитории, оснащенной мультимедиым проекционным оборудованием и интерактивной доской.

- компьютерный класс ИФ, интегрированный в Интернет;
- Мультимедийное оборудование;
- Мультимедийные материалы;

Программное обеспечение

- Microsoft Office Word
- Microsoft Office Excel
- Программа «Origin 8.0» (Microcalc corp.) демо-версия

8. Образовательные технологии

При изучении дисциплины «Численные методы в физике» применяются следующие информационные технологии: активные и интерактивные формы, лекции, практические занятия, контрольные работы, коллоквиумы, зачеты, компьютеры. В течение семестра аспиранты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому семинару. В семестре проводятся контрольные работы (на практических занятиях). Зачет выставляется после решения всех задач контрольных работ, выполнения домашних и самостоятельных работ.

При проведении занятий используются компьютерные классы, оснащенные современной компьютерной техникой. При изложении теоретического материала используется лекционный зал, оснащенный мультимедиа проекционным оборудованием и интерактивной доской.

По всему лекционному материалу подготовлен конспект лекций в электронной форме и на бумажном носителе, большая часть теоретического материала излагается с применением слайдов (презентаций) в программе **PowerPoint**, а также с использованием интерактивных досок.

Обучающие и контролирующие модули внедрены в учебный процесс и размещены на Образовательном сервере Института физики (http://www.dagphys.ru) Даггосуниверситета (http://edu.icc.dgu.ru), к которым аспиранты имеют свободный доступ.

В рамках практических занятий используется умение аспирантов производить расчеты с помощью средств вычислительной техники. Это позволяет существенно приблизить уровень статистической культуры обработки результатов измерений в практикуме к современным стандартам, принятым в науке и производственной деятельности. На этих занятиях аспиранты закрепляют навыки, опыт общения с ЭВМ и использования статистических методов обработки результатов наблюдений, что совершенно необходимо для работы в специальных учебных и производственных лабораториях

Для подготовки к практическим занятиям изданы учебно-методические пособия, которые в сочетании с внеаудиторной работой способствуют формированию и развития профессиональных навыков обучающихся.

В рамках учебного процесса предусмотрено приглашение для чтения лекций ведущих ученых из центральных вузов и академических институтов России.

Электронный учебник. Имеются и используются в учебном процессе электронные учебники по дисциплине «Численные методы в физике». Электронный учебник предназначен для самостоятельного изучения теоретического материала курса и построен на гипертекстовой основе, позволяющей работать по индивидуальной образовательной траектории. Гипертекстовая структура позволяет обучающемуся определить не только оптимальную траекторию изучения материала, но и удобный темп работы, и способ изложения материала.

Компьютерная тестирующая система. Разработана и внедрена в учебный процесс компьютерная тестирующая система, которая обеспечивает, с одной стороны, возможность самоконтроля для обучаемого, а с другой стороны используется для текущего или итогового контроля знаний аспирантов.

Презентация. Разработан электронный курс лекций по всем темам, с использованием электронных презентаций. Что улучшает восприятие материала, повышает мотивацию познавательной деятельности и способствует творческому характеру обучения.

Учебно-исследовательская работа. В процессе изучения дисциплины используется данная форма практической самостоятельной работы аспиранта, позволяющая аспирантам изучать научно-техническую информацию по заданной теме, моделировать процессы, проводить расчеты по разработанному алгоритму с применением ЭВМ и сертифицированного программного обеспечения, участвовать в экспериментах, анализировать и обрабатывать полученные результаты. Результаты исследований представляются на научно-практических конференциях.

Для усвоения дисциплины используются электронные базы учебно-методических ресурсов, электронные библиотеки.

Удельный вес занятий, проводимых в интерактивных формах, с использованием современных компьютерных средств обучения и демонстрации в учебном процессе составляет не менее 40% лекционных занятий.