



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук
Кафедра прикладной математики



«Утверждаю»
Проректор по научной работе и
инновациям
Н.А. Ашурбеков
2021 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

**Дифференциальные уравнения с дробными производными и их
численное решение**

по направлению подготовки: 02.06.01 – Компьютерные и информационные
науки

Уровень образования: подготовка кадров высшей квалификации (аспирантура)

Квалификация (степень) выпускника:

«Исследователь. Преподаватель-исследователь»

Статус дисциплины: вариативная часть обязательных дисциплин

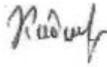
Махачкала, 2021

Рабочая программа дисциплины составлена в 2021 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки: 02.06.01–компьютерные и информационные науки квалификация выпускника: «Исследователь. Преподаватель-исследователь»

от «30» июля 2014 г. № 86/4

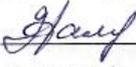
Разработчик(и): завкафедрой прикладной математики, Кадиев Р.И., д.ф.м.н., профессор

Рабочая программа дисциплины одобрена:
на заседании кафедры прикладной математики от 21.05.2021, протокол № 9

Зав. кафедрой  Кадиев Р.И.
(подпись)

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от 25.05.2021, протокол №6.

Председатель  Бейбалаев В. Д.
(подпись)

Рабочая программа дисциплины согласована с Управлением аспирантуры и докторантуры «18»  2021 г.  Рамазанова Э.Т.
(подпись) (Ф.И.О.)

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Дифференциальные уравнения с дробными производными и их численное решение» входит в вариативную часть блока 1 «Обязательные дисциплины (модули)», подготовки аспирантов по направлению 02.06.01 «Компьютерные и информационные науки»

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой прикладной математики.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с современными численными, усвоением наиболее распространенных современных численных методов, а также знакомством с современными направлениями развития численных методов.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:

универсальных – УК-1;

общепрофессиональных – ОПК-1; ОПК-2.

профессиональных – ПК-1, ПК-2.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, лабораторные занятия, самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме устного опроса, контрольных работ, зачета по лабораторным работам и промежуточный контроль в форме зачета.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, лабораторные работы и самостоятельная работа.*

1. Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям обучающегося в аспирантуре по направлению подготовки кадров высшей квалификации и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, и обучающихся направления подготовки 02.06.01–Компьютерные и информационные науки, изучающих дисциплину «Современные численные методы».

Программа разработана в соответствии с:

- Федеральным государственным образовательным стандартом ФГОС ВО по направлению 02.06.01–Компьютерные и информационные науки утвержденным приказом министерства образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 г. N 864

- Образовательной программой 02.06.01–Компьютерные и информационные науки.
- Учебным планом университета по направлению подготовки 02.06.01 – Компьютерные и информационные науки, утвержденным в 2018 г.

Объем дисциплины 2 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий

Семестр	Учебные занятия						СРС, в том числе экзамен	Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен)
	в том числе							
	Всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем						
		из них						
	Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	консультации			
2	72	10	8				54	зачет
Итого:	72	10	8				54	

1. Цели освоения дисциплины

Цель изучения курса «Дифференциальные уравнения с дробными производными и их численное решение» является:

- изучение студентами теоретических основ интегралов и производных дробного порядка, дифференциальных уравнений дробного порядка и методов их численного решения;
- владение студентами практическими навыками вычисления интегралов и производных дробного порядка и решения простейших дифференциальных уравнений с производными дробного порядка;
- владение методами численного решения задачи типа Коши и краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка;
- разработка алгоритмов численного решения математических моделей, описываемых дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка;
- умение проводить расчетно-графические работы.

2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре

В результате освоения программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине (модулю):

<i>Коды компетенции</i>	Результаты освоения ОПОП <i>Содержание компетенций*</i>	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
УК-1	способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	Знать: Основные понятия дифференциальных уравнений дробного порядка и методы их численного решения. Уметь: применять численные методы решения дробных дифференциальных уравнений при решении конкретной прикладной задачи математики. Владеть: способностью анализировать результаты решений задач.

ОПК-1	способность самостоятельно осуществлять научно- исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	<p>Знать: какой численный метод выбирать самостоятельно для решения и исследования конкретной прикладной задачи математики.</p> <p>Уметь: применять численные методы решения дробных дифференциальных уравнений дробного порядка к решению прикладных задач математики.</p> <p>Владеть: навыками самостоятельно решать практические задачи, пользуясь современным интегриродифференцированием дробного порядка.</p>
ОПК-2	готовностью к преподавательской деятельности по образовательным программам высшего образования.	<p>Знать: основные методические приемы изложения новых тем по численным методам.</p> <p>Уметь: грамотно и доходчиво излагать слушателям современные численные методы и их применение на практике.</p> <p>Владеть: навыками самостоятельно грамотно и доходчиво излагать слушателям современные численные методы.</p>
ПК-1	способность выполнять математическое моделирование объектов и процессов с целью анализа и оптимизации их параметров с использованием имеющихся средств исследований, включая стандартные пакеты прикладных программ	<p>Знать: основные понятия интегралов и производных дробного порядка и численные методы их решения.</p> <p>Уметь: выполнять математическое моделирование объектов и процессов, описываемых дробными дифференциальными уравнениями с целью анализа и оптимизации их параметров с</p>

		<p>использованием имеющихся средств исследований, включая стандартные пакеты прикладных программ.</p> <p>Владеть: навыками математического моделирования объектов и процессов, описываемых дробными дифференциальными уравнениями с использованием имеющихся средств исследований, включая стандартные пакеты прикладных программ.</p>
ПК-2	<p>способность к организации и проведению теоретических исследований и вычислительных экспериментов с применением современных информационных технологий, обработке и интерпретации полученных результатов.</p>	<p>Знать: как организовать и проводить теоретические исследования и вычислительные эксперименты с применением современных информационных технологий.</p> <p>Уметь: организовать и проводить теоретические исследования и вычислительные эксперименты с применением современных информационных технологий.</p> <p>Владеть: навыками организации теоретических исследований и вычислительных экспериментов с применением современных информационных технологий.</p>

В результате изучения дисциплины обучающийся осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
универсальные	УК-1	Использует современные научные достижения в области вычислительной математики в научной работе	Лекции, самостоятельная работа
общепрофессиональные	ОПК-1	Демонстрирует умение самостоятельно применять современный аппарат интегрирования дробного порядка в своей научной работе	Лекция, самостоятельное изучение материала, работа в дисплейном классе
	ОПК-2	Демонстрирует готовность преподавать в вузе дисциплину «дифференциальные уравнения дробного порядка и их численное решение»	Посещение занятий опытных преподавателей, изучение методической литературы
профессиональные	ПК-1	Демонстрирует умение выполнять математическое моделирование объектов и процессов с целью анализа и оптимизации их параметров с использованием имеющихся средств исследований, включая стандартные пакеты прикладных программ	Лекция, самостоятельное изучение материала, работа в дисплейном классе
		ПК-2	Владеет способностью к организации и проведению теоретических исследований и вычислительных экспериментов

3. Место дисциплины в структуре ОПОП

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

Математический анализ, дифференциальные уравнения, алгебра, функциональный анализ, уравнения математической физики.

Для освоения учебной дисциплины, обучающиеся должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- Владеет знанием основными понятиями дробных дифференциальных уравнений и численными методами их решения и умеет применять при исследовании прикладных задач математики (компетенция УК-1);
- знанием выбирать самостоятельно численный метод для решения и исследования конкретной прикладной задачи математики (компетенция ОПК-1);
- умение выполнять математическое моделирование объектов и процессов с целью анализа и оптимизации их параметров с использованием имеющихся средств исследований, включая стандартные пакеты прикладных программ (компетенция ПК-1) ;
- знанием как организовать и проводить теоретические исследования и вычислительные эксперименты с применением современных информационных технологий (компетенция ПК-2);

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 2 зачетные единицы 72 академических часа.

4.2. Структура дисциплины.

№	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра)				Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические	Лаб. Раб.	Сам. раб.	
Модуль 1. Интегралы и производные дробного порядка								
1	Дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля, Рисса, Сарато, Грюнвальда-Летникова.. Свойства.	2	1	2		2	14	Индивидуальный фронтальный опрос, лабораторная работа.
2	Аппроксимация производных дробного порядка. Порядок аппроксимации.	2	2	2		2	14	-----
Итого по модулю 1:				4		4	28	

Модуль 2. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка								
3	Обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка.	2	3	2		2	12	Индивидуальный фронтальный опрос, лабораторная работа.
4	Численные методы решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка. Порядок точности и сходимости численных методов решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка	2	4	4		2	14	---
Итого по модулю 2:				6		4	26	
Итого:				10		8	54	

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

Модуль 1. Интегралы и производные дробного порядка

Тема 1. Дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля, Рисса, Сарато, Грюнвальда-Летникова.. Свойства.

Интегральное уравнение Абеля. Разрешимость уравнения Абеля в классе интегрируемых функций. Определения дробного интеграла и производной Римана-Лиувилля и их свойства. Дробная производная Римана-Лиувилля на оси и полуоси. Дробные производные высших порядков. Примеры вычислений дробных интегралов и производных. Дробная производная Сарато. Достаточное условие существования дробной производной. Определение дробной производной Грюнвальда-Летникова. Связь между дробной производной Римана-Лиувилля и дробной производной Грюнвальда-Летникова. Формулы Грюнвальда-Летникова для приближенного вычисления дробной производной.

Тема 2. Аппроксимация производных дробного порядка. Порядок аппроксимации.

Аппроксимация производных дробного порядка Римана-Лиувилля, Капуто, Рисса. Порядок аппроксимации.

Модуль 2. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка

Тема 1. Обыкновенные дифференциальные дробного порядка.

Некоторые специальные функции. Обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка. Задача типа Коши. Существование и единственность решения задачи типа Коши.

Тема 2. Численные методы решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка. Порядок точности и сходимость численных методов решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка.

Численные методы решения задачи типа Коши. Порядок аппроксимации разностной схемы. Алгоритм численного решения задачи типа Коши.

Тема 3. Порядок точности и сходимость численных методов решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка.

Порядок точности разностной схемы аппроксимирующей задачу Коши для ОДУ дробного порядка и сходимость. О зависимости сходимости разностных методов решения задачи типа Коши для ОДУ дробного порядка от шага.

5. Оценочные средства для текущего контроля и аттестации обучающегося

Типовые контрольные задания

Численные методы решения ОДУ дробного порядка

Вариант 1

1. Найти приближенное решение $y(x)$ задачи типа Коши

$$\begin{cases} \partial_{0x}^{\alpha} y = \frac{y^2}{x^2 + 1} - (x - 1)^2, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

при $\alpha = 0,5$ на отрезке $[0;0,4]$ с шагом $h = 0,1$.

2. Найти приближенное решение с шагом $h = 0,1$ на отрезке $[0;0,5]$ при $\alpha = 0,5$

$$\begin{cases} D_{0x}^{\alpha} y = x(y - x)^2 - x^3 + 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Найти приближенное решение $y(x)$ задачи типа Коши

$$\begin{cases} \partial_{0x}^{\alpha} y = \frac{y^2}{x+1} - x, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

при $\alpha = 0,5$ на отрезке $[0;0,5]$ с шагом $h = 0,1$.

2. Найти приближенное решение задачи типа Коши с шагом $h = 0,05$ на отрезке $[0;0,3]$ при $\alpha = 0,5$

$$\begin{cases} D_{0x}^{\alpha} y = xy - (x+1)^2 + 2, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Ориентировочный перечень вопросов к зачету по всему курсу

1. Интегральное уравнение Абеля и его разрешимость в классе интегрируемых функций.
2. Определения дробного интеграла Римана-Лиувилля и его свойства.
3. Определение дробной производной на отрезке. Свойства.
4. Дробная производная на оси и полуоси.
5. Дробная производная Caputo. Достаточное условие существования дробной производной.
6. Дробная производная Грюнвальда-Летникова и ее свойства.
7. Аппроксимация дробной производной. Порядок аппроксимации.
8. ОДУ дробного порядка. Задача типа Коши для ОДУ дробного порядка. Существование и единственность решения.
9. Численное решение задачи типа Коши для ОДУ дробного порядка.
10. Порядок точности и сходимость численного метода решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка.
11. Разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу для ОДУ дробного порядка, порядок аппроксимации, порядок точности, сходимость.
12. Аппроксимация частной производной дробного порядка.
13. Разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу для уравнения теплопроводности с производными дробного порядка, сходимость.
14. Разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу для уравнения теплопроводности с двусторонней производной дробного порядка, сходимость.
15. Разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка, сходимость.

Темы для самостоятельного изучения:

1. Дробная производная Рисса, аппроксимация, порядок аппроксимации. (см. [1-4] раздела 8)
2. Численное исследование математической модели «фрактального» осциллятора, фазовая плоскость. (см. [5] раздела

- 8)
3. Линейные динамические системы, описываемые производными дробного порядка. (см. [3] раздела 8)
 4. Нелинейные динамические системы, описываемые производными дробного порядка. (см. [3] раздела 8)
 5. Нелинейное уравнение теплопроводности с дробными производными. (см. [5] раздела 8)

Темы для рефератов:

1. Математическая концепция фрактала. Фрактальная размерность.
2. Численное исследование нелокальной модели Дуффинга и его странные аттракторы.
3. Численное моделирование нелокальных процессов промерзания в средах с фрактальной структурой.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

6.1. основная литература:

- [1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.- Минск: Наука и Техника, 1987.- 688с. <http://www.read.in.ua/book140679/> (дата обращения 20.06.2018).
- [2] Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик, 2000.- 299с. <http://www.read.in.ua/book139770/> (дата обращения 20.06.2018).
- [3] Бейбалаев В.Д., Назаралиев М.А. Динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка.- ИПЦ ДГУ.- 2012.- 85 с.

6.2. дополнительная литература

- [1] Алероев Т.С., Зверьев Е.М., Ларионов Е.А. Дробное исчисление и его применение // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 37. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-37>
- [2] Мейланов Р.П., Бейбалаев В.Д., Шахбанова М.Р. Прикладные аспекты дробного исчисления. Palmarium Academic Publishing.-2012.-135 с.
- [3] Бейбалаев В.Д., Абдуллаев И. А., Наврузова К.А., Гаджиева Т.Ю. О разностных методах решения задачи Коши для ОДУ с оператором дробного дифференцирования.- Вестник ДГУ, вып. 6.- 2014.- С. 53-61.

6.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Федеральный портал российское образование <http://edu.ru>;
2. Электронные каталоги Научной библиотеки Даггосуниверситета <http://elib.dgu.ru/?q=node/256>;
3. Образовательные ресурсы сети Интернет <http://catalog.iot.ru/index.php>;
4. Электронная библиотека <http://elib.kuzstu.ru>.

6.4. Программное обеспечение

Для успешного освоения дисциплины, обучающийся использует следующие программные средства: различные пакеты прикладных программ (Mathcad, Matlab и др.), а также интернет-ресурсы.

6.5. Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

6.5.1. Важнейшими целями являются:

приобщение аспирантов – будущих преподавателей высшей школы и/или исследователей в области прикладной математики и информатики – к активному использованию информационных технологий, компьютерных систем и поисковых систем для эффективного и оперативного поиска и сбора информации и хранения ее в удобном для использования виде;

активное повседневное пользование наиболее известными базами данных, информационно-справочными и поисковыми системами (см. ниже п. 6.4.3);

ознакомление с основными принципами построения информационно-справочных систем и организации баз данных и экспертных систем;

получение теоретических знаний и практических навыков по проектированию и разработке баз данных и экспертных систем;

приобретение знаний об основных этапах проектирования баз данных, моделях данных и моделях представления знаний.

6.5.2. Для достижения этих целей необходимо:

1. Дать знания: - о моделях представления данных и знаний; - о физической организации баз данных; - об основных этапах проектирования баз данных; - о системах управления базами данных и экспертных системах; - о принципах построения справочных и поисковых систем.

2. Привить умения: - пользования компьютерными методами сбора, хранения и обработки информации в сфере профессиональной деятельности; - эффективного применения компьютерной техники для решения учебных и профессиональных задач; - использовать возможности современных систем управления базами данных; - применения различных методов сбора, хранения и обработки информации; - самостоятельного создания своих баз данных и поисковых систем, а также информационно-справочных систем, адаптированных к конкретной области знаний и/или научного поиска.

3. Владеть: - методами организации данных и знаний в системах управления базами данных и экспертных системах; - основательными знаниями и навыками представления информации, методами ее сбора, хранения, кодировки и передачи; - знаниями о современных системах управления базами данных и экспертных системах.

6.5.3. Обязательные для использования базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

1. Ресурс периодических изданий России [Электронный ресурс]: <http://www.ebiblioteka.ru>.
2. Российский образовательный форум [Электронный ресурс]: <http://www.schoolexpo.ru>.
3. ВикиЗнание: гипертекстовая электронная энциклопедия [Электронный ресурс]: <http://www.wikiznanie.ru>.
4. Википедия: свободная многоязычная энциклопедия [Электронный ресурс]: <http://ru.wikipedia.org>.
5. Педагогический энциклопедический словарь [Электронный ресурс]: <http://dictionary.fio.ru>.
6. Инновационная образовательная сеть «Эврика» – [Электронный ресурс]: <http://www.eurekanet.ru>.
7. Центр дистанционного образования «Эйдос» – [Электронный ресурс]: <http://www.eidos.ru>.

6.5.4. Рекомендации по выбору дополнительных литературных источников

В качестве курса, формирующего концептуальные представления о принципах построения БД и СУБД и представляющего фундаментальные понятия и математические модели, лежащие в основе БД и СУБД, принципы проектирования БД, а также технологии реализации БД, и иллюстрирующего вышеуказанные понятия на примерах, можно рекомендовать [1].

В качестве учебно-методического пособия с кратким изложением основных возможностей СУБД по разработке информационных систем пользователями-непрофессионалами в области разработки информационных систем и программирования, можно рекомендовать [2], где рассматривается пример разработки информационной системы.

Пособие [3] составлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта, программой и учебным планом и содержит теоретические аспекты проектирования и разработки приложений для высокопроизводительных информационных систем.

Учебные пособия [4]-[5] охватывают в основном вопросы организации поиска информации в сети Internet. В них в краткой форме излагаются принципы работы поисковых систем и построения алгоритма поиска, краткий обзор различных поисковых систем.

6.5.5. Дополнительные литературные источники

[1] Швецов В.И. Базы данных [Электронный ресурс]/ Швецов В.И. – Электрон. текстовые данные. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), 2016. – 218 с.

– Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/52139.html>. – ЭБС «IPRbooks».

[2]. Самуйлов С.В. Базы данных [Электронный ресурс]: учебно-

методическое пособие для выполнения лабораторной и контрольной работы/ Самуйлов С.В. – Электрон. текстовые данные. – Саратов: Вузовское образование, 2016. – 50 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/47276.html>. – ЭБС «IPRbooks».

[3]. Николаев Е.И. Базы данных в высокопроизводительных информационных системах [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Николаев Е.И. – Электрон. текстовые данные. – Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2016. – 163 с.

– Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/69375.html>. – ЭБС «IPRbooks».

[4]. Королева О.Н. Поисковые системы сети Internet [Электронный ресурс]: курс лекций/ Королева О.Н., Мажукин А.В., Королева Т.В. – Электрон. текстовые данные. — М.: Московский гуманитарный университет, 2012. — 34 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/14523.html>. – ЭБС «IPRbooks».

[5]. Коваленко Ю.В. Информационно-поисковые системы [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие/ Коваленко Ю.В., Сергиенко Т.А. – Электрон. текстовые данные. – Омск: Омская юридическая академия, 2017. – 38 с.

– Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/66817.html>. – ЭБС «IPRbooks».

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебные аудитории для проведения лекционных занятий и дисплейные классы факультета с современными компьютерами, к которым имеется необходимое программное обеспечение.

8. Образовательные технологии

При реализации различных видов учебной работы используются лекционная и лабораторная формы занятий, беседы, самостоятельная лабораторная форма в дисплейном классе с необходимым программным обеспечением.