

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук



«Утверждаю»

Ректор ФГБОУ ВО «Дагестанский
государственный университет»

Рабданов М.Х.

« 31 » 01 2025 г.

ПРОГРАММА
ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА В АСПИРАНТУРУ
Специальность: 1.1.1. «Вещественный, комплексный и
функциональный анализ»

Уровень образования - подготовка научных и научно-педагогических
кадров в аспирантуре

Махачкала - 2025

Настоящая программа вступительного экзамена в аспирантуру по специальности 1.1.1 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» составлена на основе ФГОС ВО по программам магистратуры и охватывает основополагающие разделы математического анализа и дифференциальных уравнений.

Разработчик: Рамазанов А.-Р.К. – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа.

Программа обсуждена и одобрена на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук 31 января 2025 г., протокол № 5.

Декан факультета
математики и компьютерных наук

 А.З. Якубов

Программа вступительного экзамена согласована с Управлением аспирантуры и докторантуры

Начальник Управления аспирантуры
и докторантуры

«31» 01 2025 г.  Э.Т. Рамазанова

Цель вступительного экзамена - установить глубину профессиональных знаний соискателя и степень подготовленности к самостоятельному проведению научных исследований по избранной специальности.

Вступительный экзамен в аспирантуру включает фундаментальные теоретически значимые вопросы по базовым дисциплинам подготовки магистров по направлению 01.04.01 Математика.

Экзамен проводится в устной форме по билетам с оценкой знаний поступающих в аспирантуру по нижеприведенной шкале оценок.

Оценка *«Отлично»* выставляется за обстоятельный, полный, развернутый ответ на поставленный вопрос, показана совокупность осознанных знаний об объекте, проявляющаяся в свободном оперировании понятиями, умении выделить существенные и несущественные его признаки, причинно-следственные связи. Знание об объекте демонстрируется на фоне понимания его в системе данной науки и междисциплинарных связей. Ответ формулируется в терминах науки, изложен литературным языком, логичен, доказателен, демонстрирует авторскую позицию соискателя.

Оценка *«Хорошо»* выставляется за правильные, полные, развернутые ответы на поставленные вопросы, доказательно раскрыты основные положения темы; в ответе прослеживается четкая структура, логическая последовательность, отражающая сущность раскрываемых понятий, теорий, явлений. Ответы изложены литературным языком в терминах науки. В ответе допущены недочеты, исправленные соискателем самостоятельно в процессе ответа.

Оценка *«Удовлетворительно»* выставляется при полном, но недостаточно последовательном ответе на поставленные вопросы, но при этом показано умение выделить существенные и несущественные признаки и причинно-следственные связи. Ответ логичен и изложен в терминах науки, допущены 1-2 ошибки в определении основных понятий, которые соискатель затрудняется исправить самостоятельно.

Оценка *«Неудовлетворительно»* дан неполный ответ, представляющий собой разрозненные знания по теме вопроса с существенными ошибками в определениях. Присутствуют фрагментарность, нелогичность изложения. Соискатель не осознает связь данного понятия, теории, явления с другими объектами дисциплины. Отсутствуют выводы, конкретизация и доказательность изложения. Речь неграмотная. Дополнительные и уточняющие вопросы членов комиссии не приводят к коррекции ответа соискателя не только на поставленный вопрос, но и на другие вопросы дисциплины.

Программа вступительного экзамена
Основы вещественного анализа

Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Переход к пределу в неравенствах и в арифметических операциях. Критерий Коши сходимости последовательности. Монотонные последовательности. Предел функции. Основные свойства предела функции. Критерий Коши. Замечательные пределы. Сравнение функций в окрестности данной точки. Эквивалентные функции. Кратные и повторные пределы функции. Непрерывные функции. Локальные и глобальные свойства непрерывных функций. Определения производных. Дифференцируемость и дифференциал функции. Теоремы о среднем дифференциального исчисления (теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши, Дарбу). Формула Тейлора с остатком в различных формах. Разложения элементарных функций. Исследование функций и построение их графиков. Теоремы о неявных функциях. Первообразная и неопределенный интеграл. Методы замены переменной и интегрирования по частям. Определенный интеграл Римана. Классы интегрируемых функций (непрерывные функции, монотонные функции, интегрируемые разрывные функции). Основные свойства интегрируемых функций и интеграла Римана. Теоремы о среднем. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Несобственные интегралы. Свойства. Числовой ряд. Свойства сходящихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Признаки сходимости. Кратные и повторные ряды. Бесконечные произведения. Связь с рядами. Функциональные ряды. Признаки равномерной сходимости функционального ряда. Функциональные свойства сумм рядов. Степенные ряды. Ряды Тейлора. Интегралы, зависящие от параметра. Сходимость, равномерная сходимость. Функциональные свойства интегралов с параметрами. Эйлеровы интегралы. Ряд Фурье по ортогональной системе функций. Общие свойства. Тригонометрический ряд Фурье-Римана. Лемма Римана. Интеграл Дирихле. Принцип локализации рядов Фурье-Римана. Признаки сходимости тригонометрического ряда Фурье-Римана. Преобразование Фурье. Свойства. Кратные интегралы. Свойства. Замена переменных в кратных интегралах. Криволинейные интегралы. Формула Грина. Поверхностные интегралы. Свойства. Формулы Гаусса-Остроградского, Стокса. Приложения. Функции ограниченной вариации. Свойства. Интеграл Стильбеса. Свойства. Приложения к рядам Фурье. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов Фурье. Мера Лебега. Основные свойства. Измеримые функции. Свойства.

Интеграл Лебега. Свойства.

Абсолютно непрерывные функции. Свойства.

Ряды Фурье-Лебега. Полнота и замкнутость тригонометрической системы функций.

Свойства рядов Фурье-Лебега функций с интегрируемым квадратом. Теорема Рисса-Фишера.

Основы дифференциальных уравнений

Общая теория. Интегрируемые в квадратурах дифференциальные уравнения.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков.

Фундаментальная система решений. Структура и построение общего решения.

Методы решения линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Устойчивость решений систем линейных дифференциальных уравнений.

Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений второго порядка .

Функция Грина. Задача Штурма-Лиувилля.

Основные типы дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Уравнение диффузии (теплопроводности). Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности. Метод разделения переменных.

Уравнение колебания струны. Задача Коши на всей прямой.

Формула Даламбера. Метод разделения переменных.

Дифференциальные уравнения Лапласа и Пуассона.

Краевые задачи Дирихле и Неймана. Вопросы единственности решения.

Фундаментальные решения уравнения Лапласа.

Решение задачи Дирихле для круга методом разделения переменных.

Функция Грина краевой задачи Дирихле.

Элементы функционального анализа

Топологические и линейные топологические пространства.

Метрические и линейно нормированные пространства.

Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений.

Компактность в метрических пространствах.

Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность.

Последовательности линейных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.

Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном операторе.

Линейные функционалы и сопряженное пространство. Теорема Хана-Банаха в нормированном пространстве и ее следствия.

Гильбертовы пространства. Общий вид линейного функционала.

Интегральные уравнения Вольтерры и Фредгольма. Вопросы существования решения и методов решения.

Элементы комплексного анализа

Функции комплексного переменного. Аналитические функции. Условия Коши-Римана.

Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру.

Интегральная формула Коши.

Ряды аналитических функций. Свойства.

Разложение аналитической функции в ряд Тейлора.

Ряд Лорана. Изолированные особые точки. Вычеты.

Гармонические функции. Принцип максимума. Теорема о среднем.

ЛИТЕРАТУРА

а) основная литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3. М.: Физматлит, 2008.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 7. М.: Физматлит, 2023.
3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. Изд. 4. М.: Физматлит, 2008.
4. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд. 7. М.: Физматлит, 2004.
6. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Юрайт, 2019.

б) дополнительная литература

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. М.: Юрайт, 2023.
2. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.
3. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. М: МВТУ, 2011.
4. Боговский М.Е. Уравнения математической физики. М: МВТУ, 2019.
5. Алгазин О.Д., Облакова Т.В. Ряды и теория функций комплексного переменного. М: МВТУ, 2016.

в) интернет-ресурсы

1. <http://e.lanbook.com>
2. www.iprbookshop.ru
3. <http://biblioclub.ru/>

Примерные экзаменационные вопросы для поступления в аспирантуру

1. Непрерывные функции. Локальные и глобальные свойства непрерывных функций.
2. Производные, дифференцируемость и дифференциал функции. Теоремы о среднем дифференциального исчисления.
3. Формула Тейлора с остатком в различных формах.
4. Теоремы о неявных функциях.
5. Определенный интеграл Римана. Классы интегрируемых функций.
6. Основные свойства интегрируемых функций и интеграла Римана. Теоремы о среднем.
7. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.
8. Числовой ряд. Абсолютно сходящиеся и условно сходящиеся ряды. Признаки сходимости.
9. Бесконечные произведения. Связь с рядами.
10. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов. Функциональные свойства сумм рядов.
11. Тригонометрический ряд Фурье-Римана. Интеграл Дирихле.
12. Принцип локализации рядов Фурье. Лемма Римана.

13. Сходимость ряда Фурье-Римана. Признаки сходимости.
14. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов Фурье-Римана.
15. Двойной интеграл. Свойства.
16. Замена переменных в двойном интеграле.
17. Интеграл Стильтьеса. Свойства. Приложения к рядам Фурье.
18. Мера Лебега. Основные свойства.
19. Измеримые функции. Свойства.
20. Интеграл Лебега. Свойства.
21. Абсолютно непрерывные функции. Свойства.
22. Ряды Фурье-Лебега. Полнота и замкнутость тригонометрической системы функций.
23. Свойства рядов Фурье-Лебега функций с интегрируемым квадратом. Теорема Рисса-Фишера.
24. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
25. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
26. Основные типы дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.
27. Уравнение диффузии (теплопроводности). Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности. Метод разделения переменных.
28. Уравнение колебания струны. Задача Коши на всей прямой. Формула Даламбера. Метод разделения переменных.
29. Дифференциальные уравнения Лапласа и Пуассона. Краевые задачи Дирихле и Неймана. Вопросы единственности решения.
30. Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений.
31. Компактность в метрических пространствах.
32. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность.
33. Последовательности линейных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.
34. Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном операторе.
35. Непрерывные линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха в нормированном пространстве.
36. Гильбертовы пространства. Общий вид линейного функционала.
37. Интегральные уравнения Вольтерры. Вопросы существования решения.
38. Интегральные уравнения Фредгольма. Вопросы существования решения.
39. Аналитические функции. Условия Коши-Римана.
40. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру.
41. Интегральная формула Коши.
42. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора.
43. Ряд Лорана. Изолированные особые точки. Вычеты.
44. Гармонические функции. Принцип максимума. Теорема о среднем.